

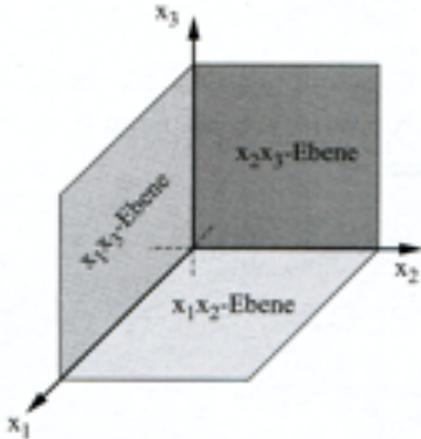
Besondere Ebenen

Lagebeziehung eines Punktes P bezüglich einer Ebene E:

Prüfen Sie, ob der Punkt $P(-2/3/4)$ in der Ebene $E: 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 5 = 0$ liegt.

$$3 \cdot (-2) + 3 + 2 \cdot 4 - 5 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow P \in E$$

(1) Koordinatenebenen:



Gleichung der x_1 - x_2 -Ebene in Parameterform:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

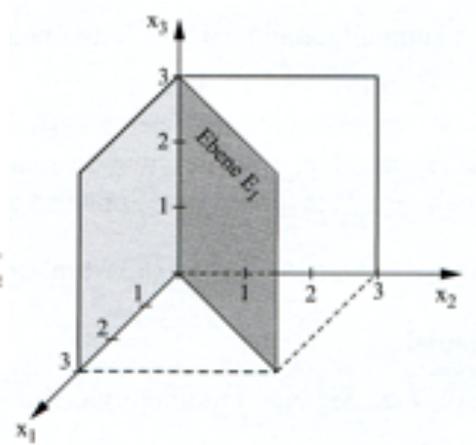
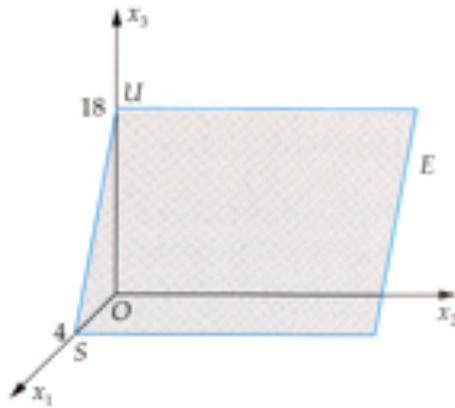
In Normalenform: $x_3 = 0$

Analog erhält man:

x_2 - x_3 -Ebene: $x_1 = 0$

x_1 - x_3 -Ebene: $x_2 = 0$

(2) Ebene, die parallel zu einer Koordinatenachse liegen:



$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow E_1: x_1 = x_2 \Rightarrow E_1: x_1 - x_2 = 0$$

E_1 enthält die x_3 -Achse, da $n_0 = 0$

Analog erhält man:

$$E_2: n_1 x_1 + n_3 x_3 = 0 \text{ (enthält die } x_2\text{-Achse)}$$

$$E_3: n_2 x_2 + n_3 x_3 = 0 \text{ (enthält die } x_1\text{-Achse)}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow E_1: 9x_1 + 2x_3 - 36 = 0$$

E_1 parallel zur x_2 -Achse, da $n_0 \neq 0$

Analog erhält man:

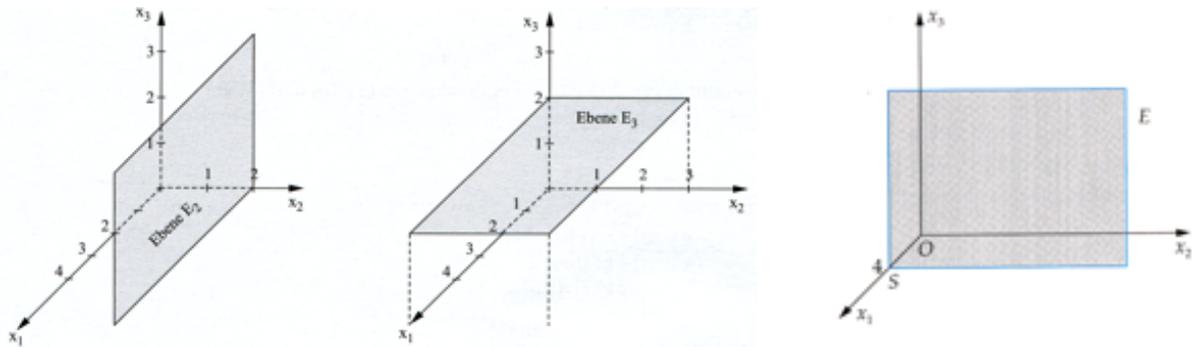
$$E_2: n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_0 = 0 \text{ (parallel zur } x_3\text{-Achse)}$$

$$E_3: n_2 x_2 + n_3 x_3 + n_0 = 0 \text{ (parallel zur } x_1\text{-Achse)}$$

Allgemein gilt:

Tritt in der Normalenform einer Ebene E eine Koordinate nicht auf, dann liegt die Ebene E parallel zu dieser Koordinatenachse.

(3) Ebene, die parallel zu zwei Koordinatenachsen liegt:



$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

In Normalenform:

$$E: x_2 = 2 \Rightarrow E: x_2 - 2 = 0 \quad E: x_3 = 2 \Rightarrow E: x_3 - 2 = 0 \quad E: x_1 = 4 \Rightarrow E: x_1 - 4 = 0$$

Parallelebenen zu den Koordinatenebenen:

$$E_1: x_1 = a_1 \text{ (parallel zur } x_2\text{-}x_3\text{-Ebene)} \Rightarrow S(a_1 / 0 / 0)$$

$$E_2: x_2 = a_2 \text{ (parallel zur } x_1\text{-}x_3\text{-Ebene)} \Rightarrow S(0 / a_2 / 0)$$

$$E_3: x_3 = a_3 \text{ (parallel zur } x_1\text{-}x_2\text{-Ebene)} \Rightarrow S(0 / 0 / a_3)$$

Allgemein gilt:

Treten in der Normalform einer Ebene E zwei Koordinaten nicht auf, dann liegt die Ebene E parallel zu der Ebene, die durch die Koordinatenachsen der fehlenden Koordinaten aufgespannt wird.

Aufgabe:

Bestimmen Sie die Gleichung einer Ebene E, die auf der Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ mit } s \in \mathbb{R} \text{ senkrecht steht und den Punkt } P(7/p_2/p_3) \text{ der Geraden } g$$

enthält.

Lösung:

Berechnung der fehlenden Koordinaten von P:

$$(I) \quad 7 = 3 + 4s \quad \Rightarrow s = 1$$

$$(II) \quad p_2 = 2 - 3s \quad \Rightarrow p_2 = -1$$

$$(III) \quad p_3 = -1 + 5s \quad \Rightarrow p_3 = 4$$

$$\Rightarrow P(7 / -1 / 4)$$

$$E: \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right] = 0$$

$$E: 4(x_1 - 7) - 3(x_2 + 1) + 5(x_3 - 4) = 0$$

$$E: 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 51 = 0$$